LICEO DELLE SCIENZE APPLICATE

A.S 2023/24

SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME - 25 MARZO 2024

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

PROBLEMA 1

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa.

L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto: ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero.

Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto.

Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe. Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo.

1. Assunto che tale modellizzazione sia descritta dalla funzione

   $$y = \mathbf{a}x^3 + \mathbf{b}x^2 + \mathbf{c}x + \mathbf{d} \quad \text{con } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R} \text{ e } x \in [0; 3]$$

   determina i valori dei parametri $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ in base alle dimensioni definite dall'artigiano.

2. Studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano *Oxy*; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.

L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5 € per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500 €; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15 € e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente.

3. Mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.

Problema 2

In un sistema di riferimento cartesiano si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = (x-a) \cdot e^{\left(2-\frac{x}{a}\right)}, \quad a \in R_0$$

a) Si determini per quali valori di a la funzione $f_a(x)$ presenta un minimo o un massimo assoluto nel suo dominio

b) Sia P_a il punto in cui $f_a(x)$ interseca l'asse delle ascisse. Si dimostri che le rette tangenti ai grafici delle $f_a(x)$ nei punti P_a sono tutte parallele tra loro.

c) Si considerino le funzioni $f_a(x)$ che hanno un punto di massimo assoluto: si dimostri che hanno un flesso in un punto del primo quadrante e che le tangenti nel punto di flesso sono tutte parallele tra loro.

d) La conclusione del punto c) è vera anche per le funzioni che hanno un minimo assoluto?

e) Si determini il valore di a per il quale la funzione $f_a(x)$ presenta un asintoto orizzontale destro ed è tale che la tangente nel punto di flesso forma con gli assi cartesiani un triangolo di area $A = \frac{25}{e}$

f) Si studi la funzione per $a = 1$.

QUESTIONARIO

1) Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x+5)}$, classificando anche gli eventuali punti di discontinuità o singolarità.

2) Data la famiglia di funzioni $\mathrm{y} =- \mathrm{x}^3 + 6\mathrm{kx} + 33$, trovare la funzione tangente nel suo punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

3) Determinare le coordinate dei punti dello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $(1;1;1)$ al piano di equazione $2\mathrm{x} - \mathrm{y} - \mathrm{z} = 0$, a distanza 6 da tale piano.

4) Preso un punto C sulla semicirconferenza di diametro $\overline{\mathrm{AB}} = 2\mathrm{r}$, sia M il punto medio dell'arco $\widehat{BC}$. Determina il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero ABMC.

5) Verifica che la funzione $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{3^{\frac{1}{\mathrm{x}}}+1}$ ha una discontinuità di prima specie ("a salto") mentre la funzione : $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}}{3^{\frac{1}{\mathrm{x}}}+1}$ ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

6) Si stabilisca il valore del limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-73cos^3\left(4x+\frac{\pi}{11}\right)}{5x-sin^2\left(x-\frac{\pi}{7}\right)}$ motivando adeguatamene la risposta.

7) Un azienda produce, in 2 capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immaganizzata in un unico capannone dove, nel caso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal 2° capannone?

8) Dimostra che l'equazione:

$$\mathrm{arctanx} + \mathrm{x}^3 + \mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 0$$

Ha una e una sola soluzione reale.